SUATU FORMULASI HAMILTON BAGI GERAK GELOMBANG INTERFACIAL YANG MERAMBAT DALAM DUA ARAH

JAHARUDDIN

Departemen Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,
Institut Pertanian Bogor
Jl. Raya Pajajaran, Kampus IPB Baranangsiang, Bogor, Indonesia

ABSTRAK. Dalam artikel ini dibahas suatu formulasi Hamilton untuk menggambarkan gerak gelombang interfacial yang merambat dalam dua arah. Persamaan Boussinesq yang diperoleh ditunjukkan memiliki struktur sebagai suatu sistem Hamilton dengan peubah kanoniknya adalah simpangan gelombang di interface yang bergerak ke arah kanan, dan simpangan gelombang lainnya yang bergerak ke arah kiri. Dalam hal ini menggunakan asumsi batas atas rata. Hamilton dari sistem ini adalah penjumlahan energi kinetik dan energi potensialnya, tetapi berdasarkan pada asumsi gelombang panjang dan amplitudo kecil.
Kata Kunci: sistem Hamilton, peubah kanonik, persamaan Boussinesq.

1. Pendahuluan

Fluida dua lapisan adalah fluida yang terdiri atas dua lapisan, dan masing-masing dengan rapat massa konstan. Persamaan gerak yang diperoleh dinyatakan dalam peubah simpangan gelombang intefacial, yaitu gelombang internal di batas kedua fluida ($interface$). Formulasinya yang eksplisit dan sederhana memungkinkan diperolehnya pemahaman masalah gelombang internal. Choi dan Camassa (1996)[1] menggunakan formulasi Euler untuk menurunkan persamaan Boussinesq pada fluida dua lapisan. Persamaan Boussinesq merupakan persamaan gerak bagi gelombang internal yang merambat dalam dua arah. Mereka menggunakan persamaan dasar fluida ideal dengan batas atas berupa permukaan bebas dan batas bawah berupa dasar rata. Dengan formulasi yang sama, Grimshaw (1997)[3] menurunkan Persamaan Boussinesq untuk batas bawah yang berupa dasar tidak rata, tetapi berubah secara lambat. Grimshaw dan Pudjaprasetya (1999)[2] menggunakan formulasi Hamilton untuk menjelaskan gelombang soliter interfacial.

Dalam artikel ini akan dibahas suatu formulasi Hamilton bagi persamaan Boussinesq pada fluida dua lapisan. Domain fluida yang ditinjau diberikan pada Gambar 1 dengan batas antara kedua fluida dalam keadaan setimbang di $z = 0$. Fluida dibatasi oleh batas bawah yang rata $z = -h_2$. Batas atas fluida dianggap batas rata $z = h_1$, karena simpangan gelombang di permukaan biasanya sangat kecil [4]. Fluida di lapisan atas mempunyai rapat massa ρ_1, sedangkan di lapisan bawah mempunyai rapat massa ρ_2 dengan $\rho_1 < \rho_2$. Fluida yang ditinjau adalah fluida ideal yang tak berotasi. Pembahasan akan dimulai dengan memperlihatkan persamaan dasar memiliki struktur sebagai suatu sistem Hamilton dengan peubah kanoniknya adalah simpangan dan kecepatan potensial di interface. Hal ini dapat dilakukan apabila asumsi batas atas rata digunakan. Hamilton dari sistem ini adalah penjumlahan energi kinetik dan energi potensialnya. Oleh karena fungsi Hamilton tidak dinyatakan secara eksplisit sebagai fungsi dari peubah kanoniknya, maka dibuat suatu pendekatan untuk menyatakan fungsi Hamilton dalam peubah kanonik.

Gambar 1. Domain fluida dua lapisan dengan batas atas dan batas bawah rata

Berdasarkan uraian di atas, maka tulisan ini akan memuat empat bagian. Setelah bagian pendahuluan ini, lebih dahulu akan dibahas konsep sistem Hamilton, kemudian pada bagian selanjutnya dibahas formulasi Hamilton untuk persamaan Boussinesq, sedangkan kesimpulan akan diberikan pada bagian terakhir.

2. Sistem Hamilton

Salah satu contoh sistem persamaan diferensial parsial yang akan dibahas adalah persamaan Boussinesq. Tetapi tidak semua sistem persamaan diferensial parsial memenuhi sistem Hamilton, diperlukan syarat tertentu yang akan diturunkan pada bagian ini. Misalkan $C_o^\infty(\mathcal{R})$ adalah ruang fungsi $v(x,t)$ dan semua turunannya bernilai nol di luar suatu selang tutup $[-M_v, M_v]$. Ruang $C_o^\infty(\mathcal{R})$ terletak di dalam ruang L^2 dengan norm $\|\cdot\|$. Perkalian dalam didefinisikan sebagai

$$< v, s >= \int_{-\infty}^{\infty} v\ s\ dx,$$

untuk setiap $v,\ s \in \mathcal{M}$ dengan $\mathcal{M}$ di $C_o^\infty(\mathcal{R})$. Selanjutnya *fungsional pada* $\mathcal{M}$ didefinisikan sebagai pemetaan $H : \mathcal{M} \to \mathcal{R}$ sehingga setiap $v \in \mathcal{M}$,

$$H(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{h}(x, v, v_x, v_{xx}, \cdots, v_{x^N})dx,$$

dengan $\bar{h}$ fungsi sembarang dari v beserta turunan-turunannya. Turunan variasi dari fungsional H terhadap v didefinisikan berdasarkan variasi pertama. Variasi pertama H di v dalam arah $s \in \mathcal{M}$ adalah

$$\frac{d}{d\bar{\epsilon}}\ H(v + \bar{\epsilon}s)\ \ |_{\bar{\epsilon}=0} = \delta H(v; s).$$

Misalkan untuk setiap $s \in \mathcal{M}$ terdapat $\gamma_s \in \mathcal{M}$ sehingga

$$\delta H(v; s) = < \gamma_s, s >_{L^2} = \int \gamma_s s dx,$$

maka pengaitan $s \mapsto \gamma_s$ mendefinisikan pemetaan $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}$ yang disebut sebagai *turunan variasi* H di v, dinotasikan $\delta_v H$. Turunan variasi $\delta_v H$ ditentukan berdasarkan persamaan berikut:

$$\delta_v H = \frac{\partial \bar{h}}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial v_x}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial v_{xx}}\right) - \cdots + \frac{d^N}{dx^N}\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial v_{x^N}}\right). \quad (2.1)$$

Selanjutnya operator $\Gamma : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ disebut *operator simetri miring*, jika setiap $v, s \in \mathcal{M}$,

$$< v, \Gamma s >= - < \Gamma v, s > .$$

Suatu persamaan diferensial parsial dikatakan sebagai suatu *sistem Hamilton*, jika terdapat fungsional H dan operator simetri miring Γ sehingga persamaan diferensial parsial tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$\partial_t v = \Gamma \delta_v H. \quad (2.2)$$

Hamilton H merupakan besaran yang tetap, artinya bahwa jika $v(x, t)$ merupakan penyelesaian dari persamaan (2.2), maka nilai $H(v(x, t))$ tidak berubah terhadap waktu. Bukti untuk pernyataan ini adalah sebagai berikut. Misalkan $\bar{r} = v + \bar{\epsilon}\partial_t v$, maka

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(v(x,t)) &= \frac{dH(\bar{r})}{d\bar{r}}\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\ \ |_{\bar{\epsilon}=0} = \frac{dH(\bar{r})}{d\bar{r}}\ \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{\epsilon}}\ \ |_{\bar{\epsilon}=0} \\ &= \frac{dH(\bar{r})}{d\bar{\epsilon}}\ \ |_{\bar{\epsilon}=0} = \frac{d}{d\bar{\epsilon}}\ H(v(x,t) + \bar{\epsilon}\partial_t v)\ \ |_{\bar{\epsilon}=0} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{dH}{dt} = < \delta_v H, \partial_t v > . \tag{2.3}$$

Jika persamaan (2.2) disubstitusi ke (2.3), maka diperoleh

$$\frac{dH}{dt} = < \delta_v H, \Gamma \delta_v H > .$$

Karena Γ operator simetri miring, maka $< \delta_v H, \Gamma \delta_v H >= 0$ sehingga

$$\frac{d}{dt} H(v(x,t)) = 0.$$

Ini berati nilai $H(v(x,t))$ tidak berubah terhadap waktu t. Selanjutnya akan dibahas sistem persamaan diferensial parsial yang merupakan sistem Hamilton. Definisikan fungsional $\bar{H}$ yaitu pemetaan $\bar{H} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{R}$ dengan

$$\bar{H}(v_1, v_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{h}(x, v_1, v_2, v_{1x}, v_{2x}, v_{1xx}, v_{2xx}, \cdots, v_{1x^N}, v_{2x^N}) dx$$

dan $\underline{h}$ fungsi sembarang dari v_1 dan v_2 beserta turunan-turunannya. Turunan variasi dari fungsional $\bar{H}$ terhadap v_1, yaitu $\delta_{v_1} \bar{H}$, memenuhi

$$\frac{d}{d\bar{\epsilon}} \bar{H}(v_1 + \bar{\epsilon} s_1, v_2) \ |_{\bar{\epsilon}=0} = < \delta_{v_1} \bar{H}, s_1 >, \ s_1 \in \mathcal{M}$$

dan turunan variasi dari fungsional $\bar{H}$ terhadap v_2, yaitu $\delta_{v_2} \bar{H}$, memenuhi

$$\frac{d}{d\bar{\epsilon}} \bar{H}(v_1, v_2 + \bar{\epsilon} s_2) \ |_{\bar{\epsilon}=0} = < \delta_{v_2} \bar{H}, s_2 >, \ s_2 \in \mathcal{M}.$$

Suatu sistem persamaan diferensial parsial dikatakan sistem Hamilton, jika terdapat fungsional $\bar{H}$ dan operator simetri miring Γ sehingga sistem persamaan diferensial parsial tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$\partial_t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \Gamma \begin{pmatrix} \delta_{v_1} \bar{H} \\ \delta_{v_2} \bar{H} \end{pmatrix}.$$

3. Persamaan Boussinesq sebagai sistem Hamilton

Berikut ini akan dibahas suatu formulasi Hamilton bagi persamaan Boussinesq pada fluida dua lapisan. Untuk itu, tinjau persamaan dasar fluida tersebut berikut ini.

$$\begin{aligned} \triangle \Phi_1 &= 0, \ \eta(x,t) < z < h_1 \\ \triangle \Phi_2 &= 0, \ -h_2 < z < \eta(x,t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

dengan Φ_1 dan Φ_2 berturut-turut menyatakan kecepatan potensial pada lapisan atas dan pada lapisan bawah. Fungsi $z = \eta(x,t)$ merupakan simpangan gelombang di interface yang dalam keadaan setimbang di $z = 0$. Syarat batas atas dan bawahnya berturut-turut adalah

$$\begin{aligned} \Phi_{1z} &= 0 \qquad \text{di} \quad z = h_1, \\ \Phi_{2z} &= 0 \qquad \text{di} \quad z = -h_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sedangkan syarat batas kinematik dan dinamik di $z = \eta(x,t)$ (interface) berturut-turut adalah

$$\begin{aligned} \eta_t + \Phi_{ix}\eta_x &= \Phi_{iz} \qquad i = 1,2. & (3.3) \\ \rho_1(\Phi_{1t} + \frac{1}{2} \mid \nabla\Phi_1 \mid^2 + g\eta) &= \rho_2(\Phi_{2t} + \frac{1}{2} \mid \nabla\Phi_2 \mid^2 + g\eta). & (3.4) \end{aligned}$$

Dalam [5], telah ditunjukkan bahwa persamaan (3.3) dan (3.4) dapat dinyatakan sebagai sistem Hamilton berikut

$$\partial_t \begin{pmatrix} \Phi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\Phi E \\ \delta_\eta E \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

dengan

$$\Phi = \rho_2\Phi_2 - \rho_1\Phi_1 \qquad \text{di} \qquad z = \eta(x,t) \tag{3.6}$$

dan

$$E(\Phi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} (K+P)dx,$$

sedangkan K dan P berturut-turut berbentuk

$$\begin{aligned} K &= \int_{-h_2}^{\eta} \frac{1}{2}\rho_2 \mid \nabla\Phi_2 \mid^2 dz + \int_{\eta}^{h_1} \frac{1}{2}\rho_1 \mid \nabla\Phi_1 \mid^2 dz, \\ P &= \frac{1}{2} g(\rho_2 - \rho_1)\eta^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Selanjutnya, apabila dimisalkan $u = \Phi_x$, maka persamaan (3.5) dapat ditulis dalam u dan η, yaitu

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_x \\ -\partial_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_u E \\ \delta_\eta E \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Energi kinetik pada persamaan (3.7) dapat dinyatakan secara eksplisit dalam variabel u dan η dengan memisalkan

$$\eta = \alpha A(X,\tilde{T}), \qquad u = \alpha U(X,\tilde{T}) \tag{3.9}$$

dengan $X = \epsilon x$ dan $\tilde{T} = \epsilon t$, serta ϵ dan α parameter kecil. Selanjutnya akan ditentukan Φ_1 dan Φ_2 yaitu penyelesaian persamaan (3.1) dengan syarat batas (3.2). Untuk itu, tuliskan Φ_1 dan Φ_2 dalam bentuk

$$\Phi_i = \epsilon(\Phi_i^{(0)} + \alpha\Phi_i^{(1)} + \mathcal{O}(\alpha^2)) \qquad i = 1,2. \tag{3.10}$$

Substitusi persamaan (3.10) ke dalam persamaan (3.1) dan syarat batas (3.2) dan menyeimbangkan parameter α dan ϵ^2 ($\alpha = \epsilon^2$), koefisien ϵ menghasilkan masalah nilai batas

$$\begin{aligned} \Phi_{izz}^{(0)} &= 0 \\ \Phi_{iz}^{(0)} &= 0 \qquad \text{di} \qquad z = (-1)^{i+1}h_i, \end{aligned}$$

dengan penyelesaian berbentuk $\Phi_i^{(0)} = F_i(X,\tilde{T}), i = 1,2$. Fungsi F_1 dan F_2 merupakan fungsi sembarang yang akan ditentukan. Selanjutnya, koefisien ϵ^3 menghasilkan masalah nilai batas untuk $\Phi_i^{(1)}$ (i=1,2) berikut

$$\begin{aligned}\Phi_{izz}^{(1)} &= -F_{iXX}\\ \Phi_{iz}^{(1)} &= 0 \qquad\qquad \text{di} \qquad z = (-1)^{i+1}h_i.\end{aligned}$$

dengan penyelesaian $\Phi_i^{(1)} = -\frac{1}{2}F_{iXX}(z+(-1)^i h_i)^2$, $i = 1,2$.
Jadi, fungsi Φ_1 dan Φ_2 yang memenuhi persamaan (3.1) dan syarat batas (3.2) adalah

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \epsilon F_1(X,\tilde{T}) - \frac{1}{2}\epsilon^3 F_{1XX}(z-h_1)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^5) \qquad (3.11)\\ \Phi_2 &= \epsilon F_2(X,\tilde{T}) - \frac{1}{2}\epsilon^3 F_{2XX}(z+h_2)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^5).\end{aligned}$$

Karena $u = \Phi_x$ dengan Φ diberikan pada persamaan (3.6), maka diperoleh $U(X,\tilde{T})$, yaitu

$$U = \rho_2 F_{2X} - \rho_1 F_{1X} + \epsilon^2\left(-\frac{1}{2}\rho_2 h_2^2 F_{2XXX} + \frac{1}{2}\rho_1 h_1^2 F_{1XXX}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \qquad (3.12)$$

Dari syarat batas kinematik (3.3) diperoleh persamaan

$$\Phi_{1z} - \Phi_{1x}\eta_x = \Phi_{2z} - \Phi_{2x}\eta_x. \qquad (3.13)$$

Substitusi Φ_1, Φ_2 dan η dalam persamaan (3.9) ke dalam persamaan (3.13), diperoleh

$$h_1 F_{1X} + h_2 F_{2X} = \epsilon^2\left(A(F_{1X} - F_{2X}) + \frac{1}{6}h_1^3 F_{1XXX} + \frac{1}{6}h_2^3 F_{2XXX}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4). \qquad (3.14)$$

Dari persamaan (3.12) dan (3.14), diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned}(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)F_{1X} &= -h_2 U + \epsilon^2\left(-\frac{\rho_2(h_1+h_2)}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}\,AU\right.\\ &\quad \left. - \frac{\frac{1}{3}\rho_2 h_1 h_2^3 + \frac{1}{6}\rho_2 h_1^3 h_2 + \frac{1}{2}\rho_1 h_1^2 h_2^2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}U_{XX}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4),\\ (\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)F_{2X} &= h_1 U + \epsilon^2\left(-\frac{\rho_1(h_1+h_2)}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}\,AU\right. \qquad (3.15)\\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{3}\rho_1 h_1^3 h_2 + \frac{1}{6}\rho_1 h_2^3 h_1 + \frac{1}{2}\rho_2 h_1^2 h_2^2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}U_{XX}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4),\end{aligned}$$

yang merupakan persamaan untuk menentukan F_1 dan F_2. Dengan menggunakan Φ_1 dan Φ_2 pada persamaan (3.11), diperoleh K dan P

pada persamaan (3.7) sebagai berikut

$$\begin{aligned} K &= \epsilon^4 \left(\frac{1}{2}\rho_1 h_1 F_{1X}^2 + \frac{1}{2}\rho_2 h_2 F_{2X}^2 + \frac{\epsilon^2}{6}\rho_1 h_1^3 F_{1XX}^2 + \frac{\epsilon^2}{6}\rho_2 h_2^3 F_{2XX}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon^2}{2}(\rho_2 F_{2X}^2 - \rho_1 F_{1X}^2)A + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right), \\ P &= \epsilon^4 \frac{1}{2} g(\rho_2 - \rho_1)A^2. \end{aligned}$$

Sehingga energi total E dapat dituliskan

$$E = \epsilon^5 \mathcal{E} = \epsilon^5 \int_{-\infty}^{\infty} J dX \tag{3.16}$$

dengan

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} g(\rho_2 - \rho_1)A^2 + \frac{1}{2}\rho_1 h_1 F_{1X}^2 + \frac{1}{2}\rho_2 h_2 F_{2X}^2 \\ &\quad + \frac{\epsilon^2}{6}\left(\rho_1 h_1^3 F_{1XX}^2 + \rho_2 h_2^3 F_{2XX}^2\right) + \frac{\epsilon^2}{2}\left(\rho_2 F_{2X}^2 - \rho_1 F_{1X}^2\right) A + \mathcal{O}(\epsilon^3). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Jika F_{1X} dan F_{2X} pada persamaan (3.15) digunakan, maka persamaan (3.17) menjadi

$$J = \frac{1}{2} g(\rho_2 - \rho_1)A^2 + \frac{1}{2}\frac{h_1 h_2}{(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)} U^2 + \epsilon^2(-\varpi U_X^2 + \nu A U^2) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{3.18}$$

dengan

$$\varpi = \frac{h_1^2 h_2^2}{6} \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)^2}, \qquad \nu = \frac{1}{2}\frac{\rho_2 h_1^2 - \rho_1 h_2^2}{(\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1)^2}.$$

Sistem Hamilton pada persamaan (3.8) menjadi

$$\partial_{\tilde{T}} \begin{pmatrix} U \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_X \\ -\partial_X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_U \mathcal{E} \\ \delta_A \mathcal{E} \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

dengan $\mathcal{E}$ berbentuk

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} J dX$$

dan J diberikan pada persamaan (3.18). Sistem Hamilton dalam persamaan (3.19) pada orde $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ secara eksplisit berbentuk

$$\begin{aligned} U_{\tilde{T}} + (g(\rho_2 - \rho_1)A + \epsilon^2 \nu U^2)_X &= 0, \\ A_{\tilde{T}} + \left(\frac{h_1 h_2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} U + 2\epsilon^2 \nu A U + 2\epsilon^2 \varpi U_{XX} \right)_X &= 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Persamaan (3.20) dikenal sebagai persamaan Boussinesq. Dengan membuat $\epsilon = 0$, persamaan (3.20) memberikan

$$\begin{aligned} A(X,\tilde{T}) &= r(X - c\tilde{T}) + s(X + c\tilde{T}) \\ U(X,\tilde{T}) &= \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{c}\Big(r(X - c\tilde{T}) - s(X + c\tilde{T})\Big). \end{aligned}$$

dengan r dan s berturut-turut merupakan fungsi yang merepresentasikan gelombang yang bergerak ke kanan dan yang bergerak ke kiri dengan kecepatan c yang memenuhi persamaan berikut.

$$c^2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)h_1 h_2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}. \tag{3.21}$$

Berdasarkan hasil di atas, diperkenalkan peubah baru R dan S berikut:

$$A = R - S \tag{3.22}$$

$$U = \frac{g(\rho_2 - \rho_1}{c}(R + S). \tag{3.23}$$

dimana c diberikan pada persamaan (3.21), sedangkan R dan S berturut-turut merepresentasikan gelombang yang bergerak ke kanan dan yang bergerak ke kiri. Jika persamaan (3.22) disubstitusikan ke persamaan (3.20), maka diperoleh $\mathcal{E} = 2g(\rho_2 - \rho_1)\hat{\mathcal{E}}$, dimana

$$\hat{\mathcal{E}} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{J}\, dX,$$

dengan

$$\begin{aligned} \hat{J} = \frac{1}{2}(R^2 + S^2) &+ \epsilon^2 \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{2c^2}\big\{-\beta(R_X + S_X)^2 \\ &+ \nu(R+S)^2(R-S)) + \mathcal{O}(\epsilon^3)\big\}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Substitusikan bentuk A dan U pada persamaan (3.22) ke dalam sistem Hamilton (3.19), diperoleh

$$\partial_{\tilde{T}}\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\partial_X & 0 \\ 0 & -c\partial_X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_R \hat{\mathcal{E}} \\ \delta_S \hat{\mathcal{E}} \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Perhatikan bahwa operator pada ruas kanan persamaan (3.25) berupa operator simetri miring. Dengan demikian persamaan (3.25) yang merupakan persamaan Boussinesq, memiliki struktur sebagai suatu sistem Hamilton dengan peubah kanoniknya adalah simpangan gelombang di interface yang bergerak ke arah kanan, dan yang bergerak ke arah kiri. Hamiltonian dari sistem Hamilton (3.25), yaitu $\hat{\mathcal{E}}$, merupakan besaran yang tetap, artinya bahwa nilai $\hat{\mathcal{E}}$ tidak berubah terhadap waktu. Jadi energi (Hamilton) dari persamaan Boussinesq pada fluida dua lapisan dengan batas atas berupa batas atas rata merupakan besaran yang konstan terhadap waktu.

4. Kesimpulan

Formulasi Hamilton untuk gerak gelombang internal pada fluida dua lapisan dilakukan berdasarkan cara yang serupa pada kasus gelombang permukaan air. Dalam hal ini fluida yang ditinjau diasumsikan mempunyai batas atas yang rata, sedangkan batas atas yang tidak rata diperlukan kajian tersendiri. Dalam formulasi Hamilton ini diperoleh persamaan Boussinesq yang menggambarkan gerak gelombang yang merambat ke dalam dua arah. Persamaan Boussinesq yang diperoleh dalam formulasi ini memiliki struktur sebagai suatu sistem Hamilton dengan peubah kanoniknya adalah simpangan gelombang di interface yang bergerak ke arah kanan, dan yang bergerak ke arah kiri. Hamiltonian (energi) dari sistem Hamilton ini merupakan besaran yang tetap atau tidak mengalami perubahan terhadap waktu.

Daftar Pustaka

[1] Choi, W., R. Camassa (1996), Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system, *J. Fluid Mech.*, **313**, 83-103

[2] Grimshaw, R., S.R. Pudjaprasetya (1999), Hamiltonian formulation for solitary wave propagating on a variable background, *Journal of Engineering Mathematics*, **36**, 89-98

[3] Grimshaw, R. (1997), Internal solitary waves, dalam *Advances in Coastal and Ocean Engineering*, Bab 1, Liu, P.L.F., Editor, World Scientific Pub. Company, Singapore, **3**, 1-30

[4] Gerkema, T. (1994), *Nonlinear Dispersive Internal Tides: Generation Models For A Rotating Ocean*, PhD-Thesis, Univ. of Utrecht, The Netherlands

[5] Groesen, E. van and E.M. de Jager (1994), *Mathematical Structures in Continuous Dynamical System*, in Series: Studies in Mathematical Physics, North-Holland, Elsevier, Amsterdam.